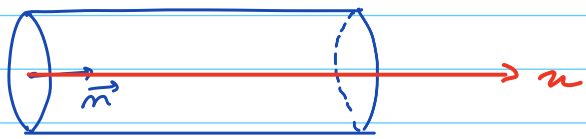
TDM2



SF1

1) $D_m = \iint \rho \vec{v}\cdot d\vec{S} = \rho \int_{r=0}^{r=R}\int_{\theta=0}^{\theta=2\pi} v_0\, \vec{u_x}\cdot\vec{u_x}\, dr\, r\, d\theta$

$= \rho\, 2\pi v_0 \int_0^R r\,dr = \rho\, 2\pi v_0 \left[\frac{1}{2} r^2\right]_0^R = \rho\, \underline{\pi R^2 v_0}$

2) $D_m = \rho \iint \vec{v}\cdot d\vec{S} = \rho \int_{r=0}^{r=R}\int_{\theta=0}^{\theta=2\pi} v_0\left(1-\frac{r^2}{R^2}\right) \vec{u_x}\cdot\vec{u_x}\, dr\, r\, d\theta$

$= \rho\, 2\pi v_0 \left[\frac{r^2}{2} - \frac{r^4}{4R^2}\right]_0^R = \rho\, 2\pi v_0 \left(\frac{R^2}{2} - \frac{R^2}{4}\right) = \rho\, \underline{\pi v_0 \frac{R^2}{2}}$.

Gym

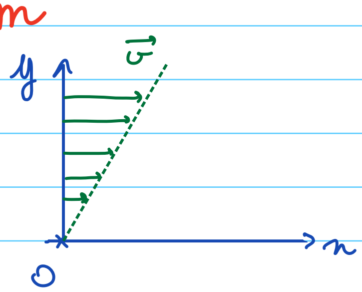
On sait que $D_v = v \times S$ avec v la vitesse débitante
S la section.

Donc $S = \frac{D_v}{v} = \frac{330 \times 3600}{2000} = \underline{594\ m^2}$

Si on note L la largeur de la Seine et h sa profondeur, on a

$S = L \times h$, donc $h = \frac{594}{165} = \underline{3{,}6\ m}$

Gym



$d\vec{F} = \eta \left.\frac{\partial v_x}{\partial y}\right|_{y=0} \vec{u_x}$

$\underline{d\vec{F} = \eta k \vec{u_x}}$

Donc $\boxed{\vec{F} = \eta k S \vec{u_x}}$

Exercice 3 - Sténose artérielle

1) L'écoulement étant visqueux, on a $\vec{v}(r=R_0)=\vec{0}$ car la paroi est fixe.

Ainsi, $1-aR_0^2=0$ ie $\boxed{a=\frac{1}{R_0^2}}$.

Ainsi,

$$\vec{v}=\frac{\Delta P\, R_0^2}{4\eta L_0}\left(1-\frac{r^2}{R_0^2}\right)\vec{u_z}$$

2) On a $U=\frac{1}{S}\iint_S \vec{v}\cdot d\vec{S}=\frac{1}{\pi R_0^2}\frac{\Delta P\, R_0^2}{4\eta L_0}\iint_S\left(1-\frac{r^2}{R_0^2}\right)\vec{u_z}\cdot dr\,r d\theta\,\vec{u_z}$

$$=\frac{1}{\pi}\frac{\Delta P}{4\eta L_0}2\pi\int_0^{R_0} r-\frac{r^3}{R_0^2}\,dr$$

$$=\frac{\Delta P}{4\eta L_0}2\left(\frac{R_0^2}{2}-\frac{R_0^4}{4R_0^2}\right)=\frac{\Delta P\, R_0^2}{8\eta L_0}$$

Donc $\boxed{\Delta P=\frac{8\eta L_0}{R_0^2}U}=\frac{8\times 6.10^{-3}\times 7.10^{-2}}{(0,7.10^{-2})^2\times\pi}\times 10.10^{-2}=\underline{7\,Pa}$.

3) En électricité, on a $R=\frac{\Delta V}{I}$ où ΔV est la variation de potentiel et I le débit des charges.

En conduction thermique, on a $R_{th}=\frac{\Delta T}{\phi}$ où ΔT est la variation de température et ϕ le flux d'énergie thermique.

Dans les trois cas, on a donc le rapport entre la variation de la grandeur dont l'inhomogénéité est à l'origine du mouvement et le débit de ce qui est mis en mouvement.

Ici, $R_H=\frac{\Delta P}{Q}=\frac{\Delta P}{U\times\pi R_0^2}=\boxed{\frac{8\eta L_0}{\pi R_0^4}}$

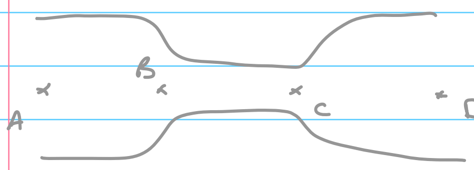
4) On a $R_H=\frac{8\eta L}{\pi R_0^4}$ et $R'_H=\frac{8\eta L}{\pi\left(\frac{R_0}{2}\right)^4}=2^4\times R_H=16R_H$

5) Les résistances sont en série, par analogie, on a donc

$$R_{tot} = R_H + R'_H + R_H = 2R_H + R'_H$$

On a donc $\boxed{R_{tot} = 18 \times \dfrac{8\eta L}{\pi R_0^4}}$

"Par analogie" peut être un peu trop rapide, et selon tous les critères dont on a déjà parlé pour prendre cette décision, vous pouvez apporter une réponse plus détaillée :



$$R_H = \frac{P_B - P_A}{Q} = \frac{P_D - P_C}{Q}$$

$$R'_H = \frac{P_C - P_B}{Q}$$

et $R_{tot} = \dfrac{P_D - P_A}{Q} = \dfrac{P_D - P_C + P_C - P_B + P_B - P_A}{Q} = R_H + R'_H + R_H$ ✓

6) On a, sans sténose $Q = \dfrac{P_D - P_A}{3R_H}$

et avec sténose $Q' = \dfrac{P_D - P_A}{18R_H} = \dfrac{Q}{6}$

$P_D - P_A$ est considéré le même avec et sans sténose car on veut comparer les débits à efforts du cœur constant.

La sténose réduit fortement le débit et donc l'apport d'oxygène aux organes. Pour compenser, le cœur devra fournir plus d'effort, ce qui le fatiguera.

7) Avec pontage, on aurait une résistance équivalente R_{eq} telle que

$$\frac{1}{R_{eq}} = \frac{1}{R_{tot}} + \frac{1}{R_{pont}}$$ avec R_{pont} la résistance du pontage.

$$R_{eq} = \frac{R_{tot} \times R_{pont}}{R_{tot} + R_{pont}} = \frac{18 \times \dfrac{8\eta L}{\pi R_0^4} \times \dfrac{8\eta \times 3L}{\pi R_2^4}}{18 \times \dfrac{8\eta L}{\pi R_0^4} + \dfrac{8\eta \times 3L}{\pi R_2^4}}$$

et on veut $R_{eq} = 3R_H$

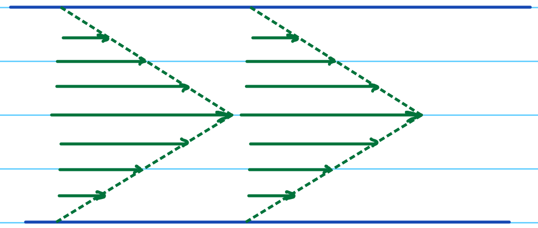
ie $$\frac{18 \times \cancel{\dfrac{8\eta L}{\pi R_0^4}} \times \dfrac{8\eta \times \cancel{3}L}{\pi R_2^4}}{18 \times \dfrac{8\eta L}{\pi R_0^4} + \dfrac{8\eta \times 3L}{\pi R_2^4}} = \cancel{3} \times \cancel{\frac{8\eta L}{\pi R_0^4}}$$

$$\frac{15}{R_2^4} = \frac{18}{R_0^4}$$

$$18 \times \frac{\cancel{8\eta L}}{\cancel{\pi} R_2^4} = \frac{18 \times \cancel{8\eta L}}{\cancel{\pi} R_0^4} + \frac{\cancel{8\eta L} \times 3}{\cancel{\pi} R_2^4}$$ ie $$\frac{18}{R_2^4} = \frac{18}{R_0^4} + \frac{3}{R_2^4}$$

Enfin $\dfrac{R_2^4}{R_0^4} = \dfrac{15}{18}$ au final $R_2 = \sqrt[4]{\dfrac{15}{18}}\, R_0 = \underline{0,95 R_0}$

Exercice 4 - Ecoulement dans une conduite de section variable

1) 

2) On a $D_v = \iint \vec{v} \cdot d\vec{S}$

$$= \iint v_0 \left(1 - \frac{r}{R_0}\right) \vec{u_z} \cdot dr\, r d\theta\, \vec{u_z}$$

$$= \int_0^{R_0} \int_0^{2\pi} v_0 \left(1 - \frac{r}{R_0}\right) dr\, r d\theta$$

$$= 2\pi v_0 \int_0^{R_0} \left(r - \frac{r^2}{R_0}\right) dr$$

$$= 2\pi v_0 \left[\frac{r^2}{2} - \frac{r^3}{3R_0}\right]_0^{R_0} = 2\pi v_0 \left(\frac{R_0^2}{2} - \frac{R_0^2}{3}\right)$$

$$\boxed{D_v = \pi v_0 \frac{R_0^2}{3}}$$

On a alors pour la vitesse débitante $U = \frac{D_v}{\pi R_0^2} = \frac{v_0}{3}$.

3) On a toujours conservation du débit massique :

à un z donné : $D_m = \int_0^{R(z)} \int_0^{2\pi} \mu(z)\, \vec{v} \cdot d\vec{S} = \int_0^{R(z)} \int_0^{2\pi} \mu(z)\, v_0 \left(1 - \frac{r}{R(z)}\right) dr\, r d\theta$

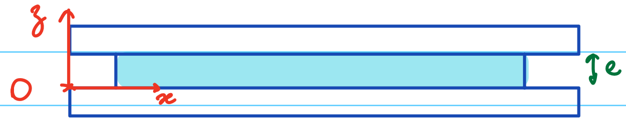
$$D_m = \mu(z)\, \pi v_0 \frac{R(z)^2}{3}$$

or D_m se conserve et vaut donc en particulier $D_m(z=0)$

$$D_m = \mu_0 \cancel{\pi} \cancel{v_0} \frac{\cancel{R_0^2}}{\cancel{3}} = \mu(z) \cancel{\pi} \cancel{v_0} \frac{\cancel{R_0^2}\, (1 + z^2/e^2)^2}{\cancel{3}}$$

$$\boxed{\mu(z) = \frac{\mu_0}{(1 + z^2/e^2)^2}}$$

Exercice 5 - Lubrification



1) La vitesse aux points de contact est égale à celle de la plaque donc avec le paramétrage sur le schéma, on a :

$$\vec{v}(z=0) = \vec{0} \quad \text{et} \quad \vec{v}(z=e) = v_0 \, \vec{u_x}$$

2) On a $v = az + b$ si la vitesse est affine

et $\begin{cases} v(0) = b = 0 \\ v(e) = ae + b = v_0 \end{cases} \Rightarrow a = \dfrac{v_0}{e}$

Au final $\boxed{v(z) = \dfrac{v_0}{e} z}$

3) La force exercée par le fluide sur une surface élémentaire de la plaque supérieure est

$$d\vec{F} = -\eta \left| \frac{\partial v}{\partial z}\bigg|_{z=e} \right| dS \, \vec{u_x}$$

car ici la paroi est en mouvement et la force de viscosité veut s'opposer à ce mouvement.

Ainsi $\boxed{\vec{f_s} = -\eta \dfrac{v_0}{e} \vec{u_x}}$

Exercice 6 - Faut-il courir sous la pluie ?

1) En avançant, la personne reçoit de l'eau seulement sur 2 surfaces :
* la surface du haut
* la surface devant

Les vitesses sont constantes et uniformes sur les surfaces où on va calculer les débits donc

$$D_m = \rho v L h + \rho U \ell L$$

En une durée Δt, on reçoit donc $\underline{m = \rho L (v h + U \ell) \Delta t}$

Or $\Delta t = \frac{d}{v}$

Donc $m = \rho L (v h + U \ell) \frac{d}{v} = \underline{\rho L d \left(h + \frac{U}{v} \ell \right)}$

2) Pour minimiser m, il faut maximiser v, donc courir le plus vite possible !

<u>BONUS</u> : et si la pluie est "penchée" par le vent ?

↳ on peut montrer que si le vent est de face, la ccl° est la même

MAIS si le vent est de dos, il faut courir à la m̂ vitesse que la composante horizontale des gouttes

C'est + complexe si le vent est de travers.

Exercice 7 - Déplacement d'un piston à l'huile

1) $G_P = \dfrac{P_2 - P_1}{h} = \dfrac{2P_1 - P_1}{h} = \dfrac{P_1}{h}$.

2) v_d est supposé uniforme dans l'interstice

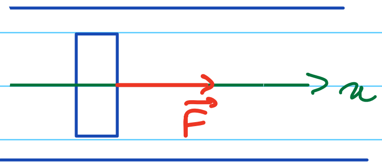
Donc $D_v = v_d \times \pi\left(\dfrac{D_2^2}{4} - \dfrac{D_1^2}{4}\right)$

$$\boxed{D_v = \alpha \frac{P_1}{4h\eta}\pi\left(D_2^2 - D_1^2\right)}$$

3) Considérons une surface élémentaire $dS = \dfrac{D_1}{2}\, d\theta\, dx$ du piston

Cette surface élémentaire subit une force $d\vec{F_v}$:

$$d\vec{F_v} = -\eta \left|\frac{\partial v_x}{\partial r}\right| \frac{D_1}{2}\, d\theta\, dx\, \vec{u_x}$$



L'interstice étant très étroit, on peut approximer

$$\frac{\partial v_x}{\partial r} = \frac{v\left(r = \frac{D_2}{2}\right) - v\left(r = \frac{D_1}{2}\right)}{\frac{D_2}{2} - \frac{D_1}{2}}$$ avec v la vitesse du fluide.

$v\left(r = \dfrac{D_1}{2}\right) = v_p$ avec v_p la vitesse du piston

$v\left(r = \dfrac{D_2}{2}\right) = 0$

car l'écoulement est visqueux.

On a donc $d\vec{F_v} = -\eta \dfrac{2v_p}{D_2 - D_1} \dfrac{D_1}{2}\, d\theta\, dx\, \vec{u_x}$

En intégrant sur toute la surface latérale du piston :

$$\vec{F_v} = -\int_{\theta=0}^{\theta=2\pi}\int_{x=0}^{x=h} \eta \frac{v_p D_1}{D_2 - D_1}\, d\theta\, dx\, \vec{u_x}$$

$$\boxed{\vec{F_v} = -\eta\, 2\pi \frac{v_p D_1 h}{D_2 - D_1}\, \vec{u_x}}$$

En ordre de grandeur, on aura $\sigma_p \simeq \sigma_d$ (en réalité, $\sigma_d < \sigma_p$) car σ_d est une moyenne spatiale de $\sigma \in [0, \sigma_p]$ sur la couronne entre D_1 et D_2)

On a alors $\vec{F}_v = -\eta \, 2\pi \dfrac{\alpha P_1 D_1}{D_2 - D_1} \vec{u_x}$

4) Le mouvement étant quasi statique, on peut considérer que les forces se compensent :

PFD$|\vec{u_x}$ $\quad 0 = \underbrace{P_1 \dfrac{D_1^2}{4}\pi - P_2 \dfrac{D_1^2}{2}\pi}_{-P_1 \frac{D_1^2}{4}\pi} - \eta \, 2\pi \dfrac{\alpha P_1 D_1}{D_2 - D_1} + F$

$$\boxed{F = P_1 \frac{D_1^2}{4}\pi + \eta \, 2\pi \frac{\alpha P_1 D_1}{D_2 - D_1}}$$

On peut approximer la variation de vitesse à une variation linéaire (car l'entrefer est très étroit). On a alors

$$v(r) = a r + b \quad \text{avec} \quad \begin{cases} v\left(\frac{D_1}{2}\right) = v_p \\ v\left(\frac{D_2}{2}\right) = 0 \end{cases}$$

car l'écoulement est visqueux

On a donc $\begin{cases} a \frac{D_1}{2} + b = v_p \\ a \frac{D_2}{2} + b = 0 \end{cases}$

ie $$a = \frac{2 v_p}{D_1 - D_2}$$

$$b = - \frac{D_2 v_p}{D_1 - D_2}$$

et $$v(r) = \frac{2 v_p}{D_1 - D_2} r - \frac{D_2 v_p}{D_1 - D_2}$$

On a alors $$D_v = \iint \left(\frac{2 v_p}{D_1 - D_2} r - \frac{D_2 v_p}{D_1 - D_2} \right) dr\, r\, d\theta$$

$$= 2\pi \left[\frac{2 v_p}{D_1 - D_2} \frac{r^3}{3} - \frac{D_2 v_p}{D_1 - D_2} \frac{r^2}{2} \right]_{D_1/2}^{D_2/2}$$

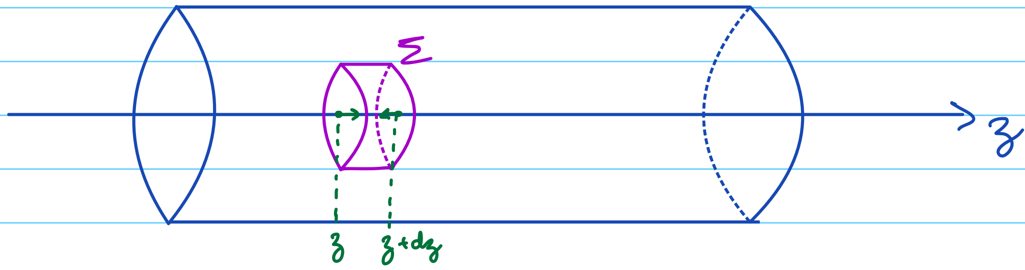
$$= 2\pi \frac{v_p}{D_1 - D_2} \left(\frac{2}{3} \left(\frac{D_2^3}{8} - \frac{D_1^3}{8} \right) - \frac{D_2}{2} \left(\frac{D_2^2}{4} - \frac{D_1^2}{4} \right) \right)$$

$$= 2\pi \frac{v_p}{D_2 - D_1} \left(+ \frac{D_2^3}{3 \times 8} + \frac{D_1^2}{8} \left(\frac{2 D_1}{3} - D_2 \right) \right)$$

$$= 2\pi \frac{v_p}{D_1 - D_2} \times \frac{2}{3 \times 8} \left(D_2^3 - D_1^3 - 3 D_2^3 - 3 D_2 D_1^2 \right)$$

$$\left(- 2 D_2^3 - D_1^3 - 3 D_2 D_1^2 \right)$$

Exercice 8 - Démonstration du profil de Poiseuille



1) Par symétrie, on voit que seules les composantes de $\vec{df_p}$ selon $\vec{u_z}$ sont non nulles.

On a donc $\vec{df_p} = P(z)\pi r^2 \vec{u_z} - P(z+dz)\pi r^2 \vec{u_z}$

$$\boxed{\vec{df_p} = -\frac{dP}{dz} dz \, \pi r^2 \vec{u_z}}$$

d et pas ∂ car P ne dépend que de z.

2) Sur la partie latérale de Σ, on a $dS = 2\pi r \, dz$ (surface latérale d'un cylindre)

Donc $\|\vec{dF_{visc}}\| = \eta \left| \frac{dv_z}{dr} \right| 2\pi r \, dz$

La direction de $\vec{dF_{visc}}$ est celle de l'écoulement : $\vec{u_z}$.

Pour le sens, si Σ va plus vite que le fluide avec lequel il est en contact, alors $\vec{dF_{visc}}$ sera portée par $-\vec{u_z}$ et $\frac{dv_z}{dr} < 0$ (car v_z dans Σ > v_z hors de Σ
Donc $v_z \downarrow$ qd $r \nearrow$)

Si Σ va moins vite que le fluide avec lequel il est en contact, alors la force est portée par $+\vec{u_z}$ et $\frac{dv_z}{dr} > 0$

Ainsi, au final $\boxed{\vec{dF_{visc}} = \eta \frac{dv_z}{dr} 2\pi r \, dz \, \vec{u_z}}$

3) Σ est un système fermé. On peut lui appliquer le théorème de la résultante cinétique.

Il va à vitesse constante, donc

$$\vec{df_{visc}} + \vec{df_p} = \vec{0}$$

On a donc $\eta \frac{dv_z}{dr} 2 \cancel{\pi} \cancel{r} \cancel{dz} \, \vec{u_z} - \frac{dP}{dz} \cancel{dz} \cancel{\pi} r^2 \, \vec{u_z} = \vec{0}$

ie $\boxed{\dfrac{dv_z}{dr} = \dfrac{r}{2\eta} \dfrac{dP}{dz}}$

4) P ne dépend pas de z. Montrer que $\frac{dP}{dz}$ est constant revient donc à montrer que $\frac{dP}{dz}$ ne dépend pas de z.

Calculons $\frac{d}{dz}\left(\frac{dP}{dz}\right)$: $\frac{d}{dz}\left(\frac{dP}{dz}\right) = \frac{d}{dz}\left(\frac{2\eta}{r} \frac{dv_z}{dr}\right)$ or v_z ne dépend pas de z

$= 0$

Ainsi $\frac{dP}{dz}$ est constant et vaut $\frac{\Delta P}{L}$

5) On a $v(r=R) = 0$

et $\frac{dv}{dr} = \frac{r}{2\eta} \frac{\Delta P}{L}$

$$dv = \frac{\Delta P}{2\eta L} r\,dr$$

$$\int_0^{v(r)} dv = \frac{\Delta P}{2\eta L} \int_R^r r'dr'$$

$$v(r) = \frac{\Delta P}{2\eta L} \frac{1}{2}(r^2 - R^2) = \underline{\frac{\Delta P}{4\eta L}(r^2 - R^2)}$$